1/1. Házi feladat

1. Legyen p és q igaz vagy hamis matematikai kifejezés. Mutassuk meg, hogy

$$((\neg p) \wedge (p \vee q)) \vee (p \vee \neg q)$$

mindig igaz.

2. Igazoljuk, hogy minden A, B és C halmazra $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ teljesül.

3. Igazoljuk, hogy minden A, B és C halmazra $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$ teljesül.

4. Legyen A halmaz és $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ halmazrendszer. Igazoljuk, hogy ekkor $A \setminus \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A \setminus A_i)$.

5. Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ esetén $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$.

6. Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ esetén $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

7. Igazoljuk, hogy ha $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ akkor $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$.

8. Legyen $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ szimmetrikus függvény, azaz minden $i, j \in \mathbb{N}$ esetén $a(i, j) = a(j, i)$. Teljes indukcióval mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra

$$\sum_{k,l=0}^{n} a(k, l) = 2 \sum_{0 \le k < l \le n} a(k, l) + \sum_{k=0}^{n} a(k, k)$$

teljesül.

Határidő: $\boxed{\textbf{2015. 09. 21. 12}^{\textbf{00}}}$

1/2. Házi feladat

1. Legyen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ alulról korlátos halmaz. Igazoljuk, hogy $A \cup B$ is alulról korlátos, valamint $\inf (A \cup B) = \min \{\inf A, \inf B\}$ teljesül.

2. Legyen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ alulról korlátos halmaz. Igazoljuk, hogy $A + B$ is alulról korlátos, valamint $\inf A + \inf B = \inf(A + B)$ teljesül.

3. Legyen $A, B \subseteq \mathbb{R}^+$ felülről korlátos halmaz. Igazoljuk, hogy minden $A, B \subseteq \mathbb{R}^+$ esetén AB alulról korlátos, valamint $(\inf A)(\inf B) = \inf(AB)$ teljesül.

4. Legyen $a, b, x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ paraméter, és minden $n \in \mathbb{N}$ számra legyen $x_{n+2} = ax_n + bx_{n+1}$. Igazoljuk, hogy ha $b^2 + 4a = 0$ és $b \neq 0$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$x_n = \left(x_0(1 - n) + \frac{2n}{b} x_1 \right) \cdot \left(\frac{b}{2} \right)^n .$$

5. Legyen $a, b, x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ paraméter, és minden $n \in \mathbb{N}$ számra legyen $x_{n+2} = ax_n + bx_{n+1}$. Igazoljuk, hogy ha $b^2 + 4a > 0$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$x_n = \left(x_0 + \frac{2x_1 - bx_0}{\sqrt{b^2 + 4a}} \right) \cdot \frac{\left(b + \sqrt{b^2 + 4a}\right)^n}{2^{n+1}} + \left(x_0 - \frac{2x_1 - bx_0}{\sqrt{b^2 + 4a}} \right) \cdot \frac{\left(b - \sqrt{b^2 + 4a}\right)^n}{2^{n+1}} .$$

6. Igazoljuk, hogy minden $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ számra

$$3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 \leq 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) .$$

7. Igazoljuk, hogy minden $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ számra

$$a^2 b + b^2 c + c^2 a \leq a^3 + b^3 + c^3 .$$

8. Igazoljuk, hogy ha az $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ számokra $abc = 1$ teljesül, akkor

$$a + b + c \leq a^2 + b^2 + c^2 .$$

Határidő: $\boxed{\mathbf{2015.\ 09.\ 28.\ 12^{00}}}$